

La boîte à outils du géomètre



Aide-mémoire

réalisé par

P. Granier et B. Grenier

professeurs de mathématiques

au Collège Jeanne de la Treilhe d'Aurillac

SOMMAIRE

A

<i>Angles</i>	
à la base.....	3
alternes-externes.....	1, 4
alternes-internes.....	1, 4
complémentaires.....	3, 4
correspondants.....	1, 4
d'un triangle.....	3
opposés par le sommet.....	4
supplémentaires.....	4

B

<i>bissectrice</i>	2, 4, 6, 7, 8
--------------------------	---------------

C

<i>carré</i>	1, 2, 3, 5, 8
<i>centre de gravité</i>	7
<i>cerce</i>	2, 3, 4, 5, 6, 8, 9
<i>Cerce</i>	
<i>circonscrit</i>	3, 5, 6
<i>inscrit</i>	8
<i>conservation</i>	1, 2, 4, 6

D

<i>direction</i>	1
<i>Droites</i>	
<i>parallèles</i>	1
<i>parallèles</i>	1, 2, 4, 6
<i>perpendiculaires</i>	1, 2, 3, 6, 7

H

<i>hauteur</i>	2, 6, 7, 8
----------------------	------------

I

<i>inégalité triangulaire</i>	10
-------------------------------------	----

L

<i>losange</i>	1, 2, 3, 5, 8
----------------------	---------------

M

<i>médiane</i>	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9
<i>médiatrice</i>	2, 3, 5, 6, 7, 8
<i>milieu</i>	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

O

<i>orthocentre</i>	7
--------------------------	---

P

<i>parallélogramme</i>	1, 3, 4, 5
<i>Points</i>	
<i>alignés</i>	6
<i>Pythagore</i>	4, 9

R

<i>rectangle</i>	1, 2, 3, 5
------------------------	------------

S

<i>Symétrie</i>	
<i>axiale</i>	1, 2, 3, 4, 5, 6
<i>centrale</i>	1, 2, 3, 4, 5, 6

T

<i>tangente</i>	2
<i>Thalès</i>	5
<i>translation</i>	1, 2, 3, 4, 5, 6
<i>trapèze</i>	1, 2, 5
<i>Triangle</i>	
<i>équilatéral</i>	2, 9
<i>inscrit</i>	9
<i>isocèle</i>	2, 3, 5, 6, 7, 8, 9
<i>rectangle</i>	3, 4, 5, 9, 10



POUR DÉMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PARALLÈLES...

D 1
⑥

Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

D 2
⑥

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles.

TR 1
⑥
⑤
④

Conservation du parallélisme
Si deux droites sont parallèles, alors leurs images par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation, sont deux droites parallèles.

M 1
④

Théorème des milieux
Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

TR 2
⑤
④

Conservation des directions
L'image d'une droite par une symétrie centrale (ou par une translation) est une droite parallèle.

D 3
⑤

Si deux droites forment avec une troisième des angles correspondants égaux ou alternes-internes égaux ou alternes-externes égaux, alors elles sont parallèles.

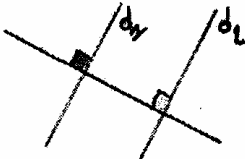
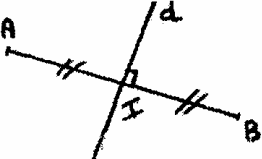
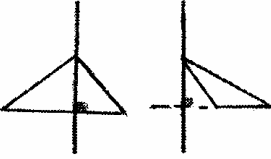

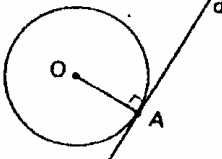
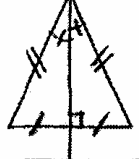
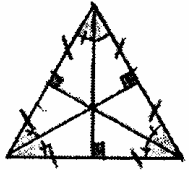
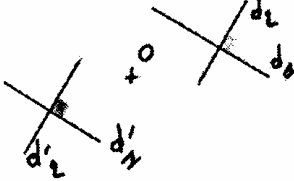
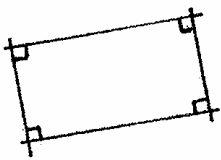
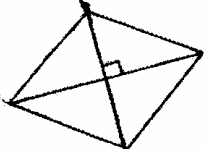
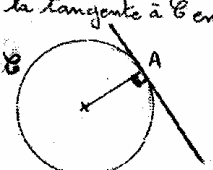

Q 1
⑥

Si un quadrilatère est un trapèze, alors ses deux bases sont parallèles.

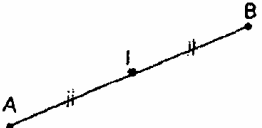
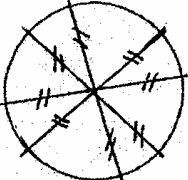
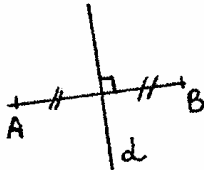
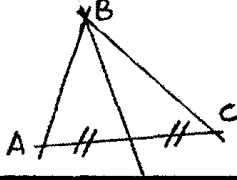
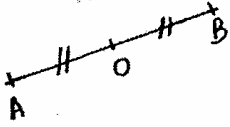
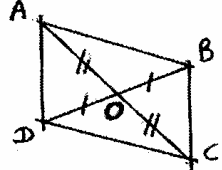
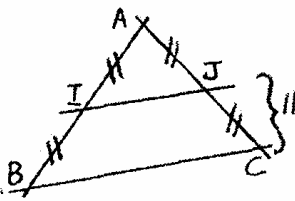
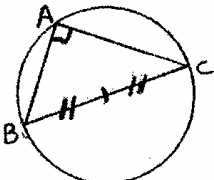

Q 2
⑥

$(AB) \parallel (CD) \quad (AD) \parallel (BC)$
Si un quadrilatère est un parallélogramme (losange, rectangle, carré), alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.




Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires...


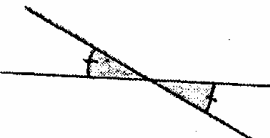
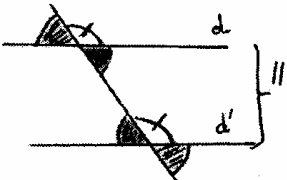
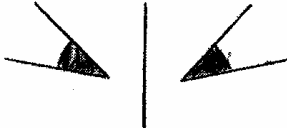
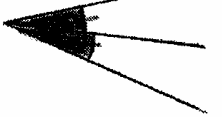

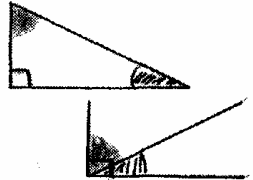
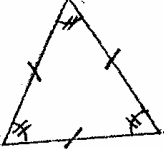
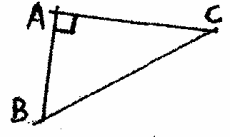
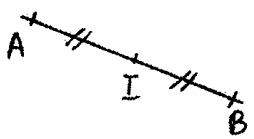
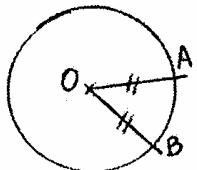
<p>D 4 ⑥</p> 	<p>M 2 ⑥</p> 	<p>T 1 ⑤</p> 
<p>Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.</p>	<p>La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.</p>	<p>Dans un triangle, une hauteur est une droite perpendiculaire à un côté qui passe par le sommet opposé.</p>
<p>Q 3 ⑤</p> 	<p>C 1 ④</p> 	<p>T 3 ⑤</p> 
<p>Si un quadrilatère est un trapèze rectangle, alors il a deux angles droits.</p>	<p>Une tangente à un cercle est une droite perpendiculaire à un rayon en un point du cercle.</p>	<p>Si un triangle est isocèle, alors la bissectrice de l'angle principal, la médiane, la hauteur et la médiatrice de la base sont confondues.</p>
<p>T 4 ⑤</p> 	<p>TR 3 ⑥ ⑤ ④</p> 	<p>Q 4 ⑥</p> 
<p>Si un triangle est équilatéral, alors les bissectrices, les médianes, les hauteurs et les médiatrices du triangle sont confondues.</p>	<p>Conservation de l'orthogonalité Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images par une symétrie axiale (ou par une symétrie centrale ou par une translation) sont deux droites perpendiculaires.</p>	<p>Si un quadrilatère est un rectangle (ou un carré), alors il a 4 angles droits..</p>
<p>Q 5 ⑤</p> 	<p>C 4 ④</p> <p>la tangente à B en A</p> 	 <p>Voir aussi les propriétés ...</p>
<p>Si un quadrilatère est un losange (ou un carré), alors ses diagonales sont perpendiculaires.</p>	<p>La tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon passant par ce point..</p>	<p>Pour démontrer qu'un triangle est rectangle</p> <p>... à la page 9</p>

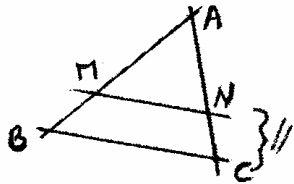
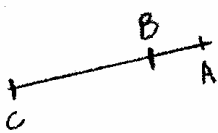
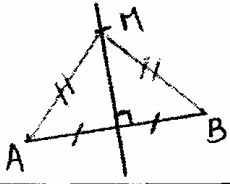
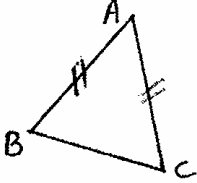
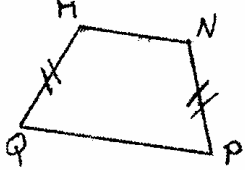
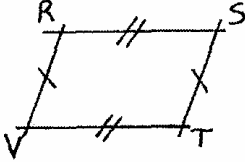
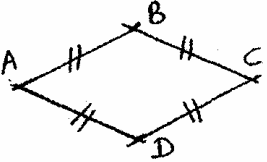
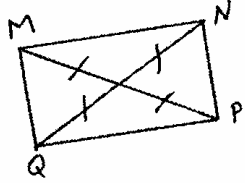
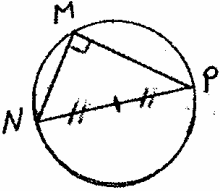
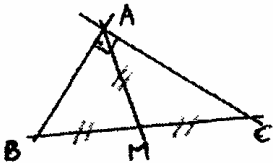
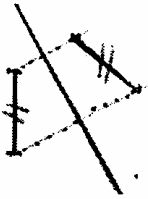
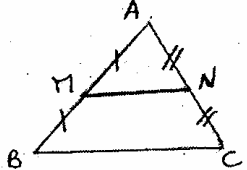
Pour démontrer qu'un point est le milieu d'un segment...

<p>M 3 ⑤</p>  <p>Le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à égale distance de ses extrémités.</p>	<p>C 2 ⑥</p>  <p>Le centre d'un cercle est le milieu de tous ses diamètres.</p>	<p>M 2 ⑥</p>  <p>La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.</p>
<p>T 5 ⑤</p>  <p>Une médiane d'un triangle est la droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.</p>	<p>TR 4 ⑤</p>  <p>Si deux points A et B sont symétriques par rapport à un point O, alors O est le milieu du segment [AB].</p>	<p>Q 6 ⑤</p>  <p>Un parallélogramme (ou un losange ou un rectangle ou un carré) a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.</p>
<p>M 4 ④</p>  <p>Réciproque du théorème des milieux</p> <p>Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, alors elle coupe le troisième en son milieu.</p>	<p>T 6 ⑤</p>  <p>Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.</p>	<p>TR 5 ⑥ ⑤ ④</p>  <p>Conservation des milieux</p> <p>Une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation, conserve les milieux.</p>

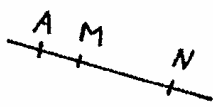
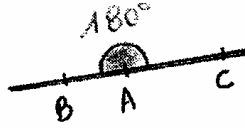
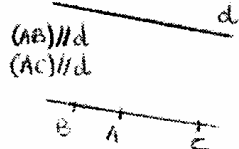
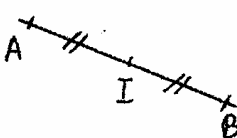
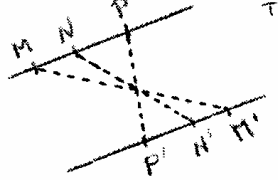
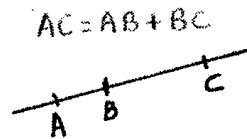
Pour démontrer que deux angles ont la même mesure...

<p>T 7 ⑤</p>  <p>La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.</p>	<p>A 1 ⑤</p>  <p>Deux angles complémentaires signifie que leur somme est égale à 90°.</p>	<p>T 8 ⑤</p>  <p>Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base ont la même mesure.</p>
---	--	---

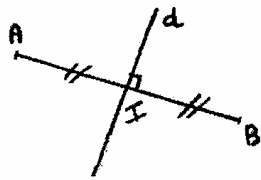
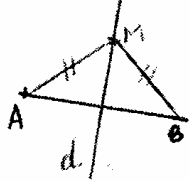
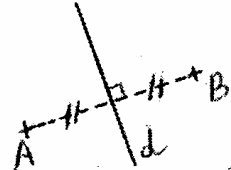
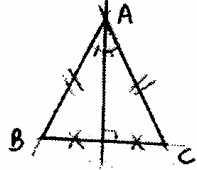

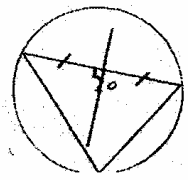
<p>Q 8 ⑤</p>  <p>Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses angles opposés de même mesure.</p>	<p>A 2 ⑤</p>  <p>Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.</p>	<p>A 3 ⑤</p>  <p>Si deux droites sont parallèles, alors elles forment avec une sécante des angles correspondants égaux, des angles alternes-internes égaux et des angles alternes-externes égaux.</p>
<p>A 4 ⑥ ⑤ ④</p>  <p>Conservation des angles Par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation, l'image d'un angle est un angle de même mesure.</p>	<p>A 5 ⑥</p>  <p>La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.</p>	<p>A 6 ⑤</p>  <p>Deux angles sont supplémentaires signifie que leur somme est égale à 180°.</p>
<p>T 9 ⑤</p>  <p>Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.</p>	<p>T 41 ⑤</p>  <p>Si un triangle est équilatéral, alors ses angles ont la même mesure 60°.</p>	
Pour démontrer que deux segments ont la même longueur...		
<p>T 10 ④</p>  <p>$BC^2 = AE^2 + AC^2$</p> <p>Théorème de Pythagore Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.</p>	<p>M 3 ⑤</p>  <p>Le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à égale distance de ses extrémités.</p>	<p>C 3 ⑤</p>  <p>Deux points situés sur un même cercle sont situés à égale distance du centre de ce cercle. Cette distance est le rayon du cercle.</p>

<p>T 11 ④</p>  <p>Théorème de Thalès (BM) et (CN) sont sécantes en A et (MN) est parallèle à (BC) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$</p>	<p>T 38 ⑤</p>  <p>Si un point B appartient au segment [AC], alors $AB+BC=AC$.</p>	<p>M 5 ⑥</p>  <p>Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est situé à égale distance des extrémités.</p>
<p>T 12 ⑥</p>  <p>Si un triangle est isocèle, alors il a deux côtés de même longueur.</p>	<p>Q 8 ⑤</p>  <p>Un trapèze isocèle est un quadrilatère qui a deux côtés (qui ne sont pas les bases) qui ont la même longueur.</p>	<p>Q 9 ⑥</p>  <p>Un parallélogramme (ou un rectangle) est un quadrilatère qui a ses côtés opposés de même longueur.</p>
<p>Q 10 ⑥</p>  <p>Un losange (ou un carré) est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur.</p>	<p>Q 11 ⑤</p>  <p>Un rectangle (ou un carré) est un quadrilatère qui a ses diagonales de même longueur.</p>	<p>T 13 ⑤</p>  <p>Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle.</p>
<p>T 14 ④</p>  <p>Si un triangle est rectangle, alors la longueur de la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de la longueur l'hypoténuse.</p>	<p>TR 6 ⑥ ⑤ ④</p>  <p>Conservation des longueurs Une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation conserve les longueurs.</p>	<p>M 8 ④</p>  <p>$MN = BC : 2$ Propriété de la droite des milieux Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié de la longueur du troisième.</p>

Pour démontrer que trois points sont alignés...

<p>D 5 ⑥</p> 	<p>D 6 ⑤</p> 	<p>D 7 ④</p> 
<p>Si trois points appartiennent à la même droite, alors ils sont alignés.</p>	<p>Si trois points définissent un angle plat (ou nul), alors ils sont alignés.</p>	<p>Si deux droites sont parallèles et ont un point commun, alors elles sont confondues</p>
<p>M 3 ⑤</p> 	<p>TR 7 ⑥ ⑤ ④</p>  <p>Conservation de l'alignement Si trois points sont alignés, alors leurs images par une symétrie axiale (ou par une symétrie centrale ou par une translation) sont alignés.</p>	<p>D 8 ⑤</p>  <p>Si $AC=AB+BC$, alors B est un point du segment [AC].</p>

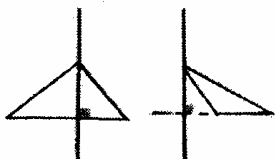
Pour démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment ...

<p>M 2 ⑥</p> 	<p>M 6 ⑥</p> 	<p>TR 8 ⑥</p> 
<p>La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.</p>	<p>Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.</p>	<p>Si deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite d alors d est la médiatrice du segment [AB].</p>
<p>T 15 ⑤</p> 	<p>T 16 ⑤</p> 	<p>M 7 ④</p> 
<p>Si un triangle est isocèle, alors la hauteur relative à la base, la bissectrice de l'angle au sommet, la médiane relative à la base est aussi la médiatrice de la base.</p>	<p>Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit au triangle.</p>	<p>Si dans un triangle, une droite passe par le centre du cercle circonscrit et est perpendiculaire à un côté, alors c'est une médiatrice du triangle.</p>

Pour démontrer qu'une droite est une hauteur d'un triangle.

T
1

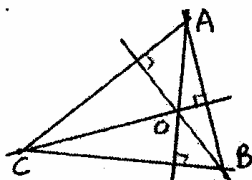
⑤



Dans un triangle, une hauteur est une droite perpendiculaire à un côté et qui passe par le sommet opposé.

T
18

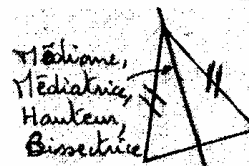
④



Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.

T
19

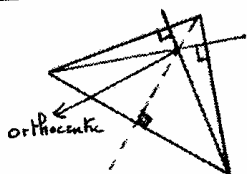
④



Si un triangle est isocèle, alors la médiane relative à la base, la bissectrice de l'angle au sommet, la médiatrice de la base est aussi la hauteur relative à la base.

T
39

④

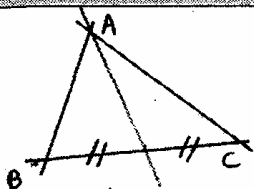


Si dans un triangle, une droite passe par un sommet et par l'orthocentre du triangle, alors c'est une hauteur du triangle.

Pour démontrer qu'une droite est une médiane d'un triangle...

T
20

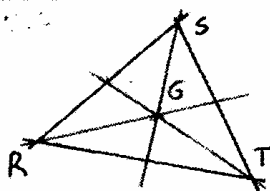
⑤



Dans un triangle, une médiane est un segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

T
21

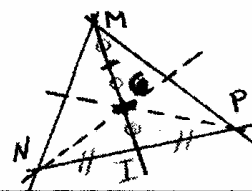
④



Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

T
22

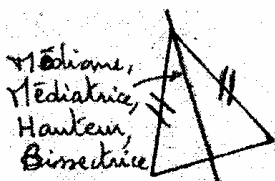
④



Dans un triangle, le centre de gravité est situé aux 2/3 de chaque médiane, en partant du sommet.

T
23

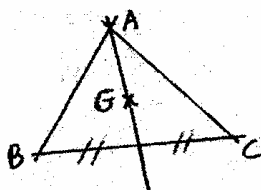
④



Si un triangle est isocèle, alors la hauteur relative à la base, la bissectrice de l'angle au sommet, la médiatrice de la base est aussi la médiane relative à la base.

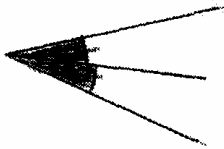
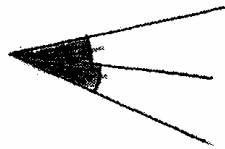
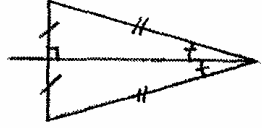
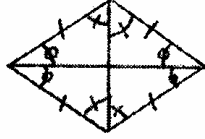
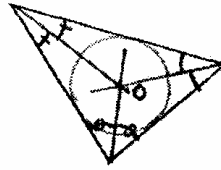
T
40

④



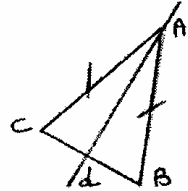
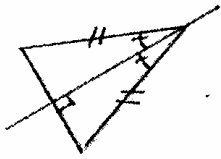


Si dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le centre de gravité du triangle, alors c'est une médiane du triangle.

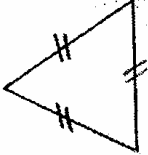
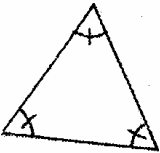


Pour démontrer qu'une droite est une bissectrice d'un triangle...

<p>A 5 ⑥</p>  <p>La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles adjacents de même mesure.</p>	<p>A 8 ⑥</p>  <p>La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.</p>	<p>T 24 ④</p>  <p>Si un triangle est isocèle, alors la hauteur relative à la base, la médiane relative à la base, la médiatrice de la base est aussi la bissectrice de l'angle au sommet.</p>
<p>Q 12 ⑤</p>  <p>Dans un losange (carré), les diagonales sont les bissectrices des angles.</p>	<p>T 25 ④</p>  <p>Les bissectrices des trois angles d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit dans le triangle.</p>	

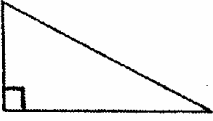
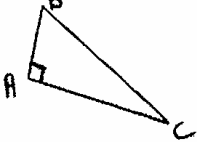
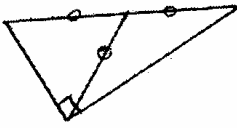
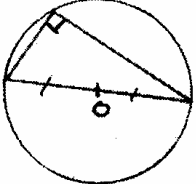

Pour démontrer qu'un triangle est isocèle...

<p>T 26 ⑥</p>  <p>Si un triangle a deux côtés de même mesure, alors c'est un triangle isocèle.</p>	<p>T 27 ⑤</p>  <p>Si un triangle a deux angles de même mesure, alors c'est un triangle isocèle.</p>	<p>T 28 ⑤</p>  <p>Si d est un axe de symétrie d'un triangle ABC et si d passe par A, alors le triangle ABC est isocèle en A.</p>
<p>T 29 ④</p>  <p>Si dans un triangle, deux des éléments parmi hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices sont confondus, alors ce triangle est isocèle.</p>		

Pour démontrer qu'un triangle est équilatéral...

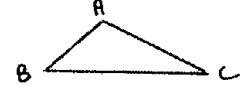
<p>T 30 ⑥</p> 	<p>T 31 ⑤</p> 	<p>T 32 ⑤</p> 
<p>Si un triangle a ses trois côtés de même mesure, alors c'est un triangle équilatéral.</p>	<p>Si un triangle a ses trois angles de même mesure, alors c'est un triangle équilatéral.</p>	<p>Si un triangle a deux angles de 60°, alors c'est un triangle équilatéral.</p>
<p>T 41 ⑤</p> 		
<p>Si un triangle isocèle a un angle de 60°, alors il est équilatéral.</p>		

Pour démontrer qu'un triangle est rectangle...

<p>T 33 ⑥</p> 	<p>T 34 ④</p> <p>Si: $BC^2 = AB^2 + AC^2$</p> <p>alors</p> 	<p>T 35 ④</p> 
<p>Si un triangle a un angle droit, alors c'est un triangle rectangle.</p>	<p align="center">Réciproque du théorème de Pythagore</p> <p>Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est rectangle.</p>	<p>Si dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle.</p>
<p>T 36 ④</p> 	 <p>Voir aussi les propriétés ...</p> <p>Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires</p> <p>... à la page 2</p>	
<p>Si un triangle est inscrit dans un cercle qui a un côté pour diamètre, alors ce triangle est rectangle.</p>		

Propriétés diverses...

T
37
⑤

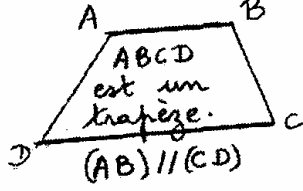


$AB < AC + BC$
 $AC < AB + BC$
 $BC < AB + AC$

Inégalité triangulaire

Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

T
37
⑤

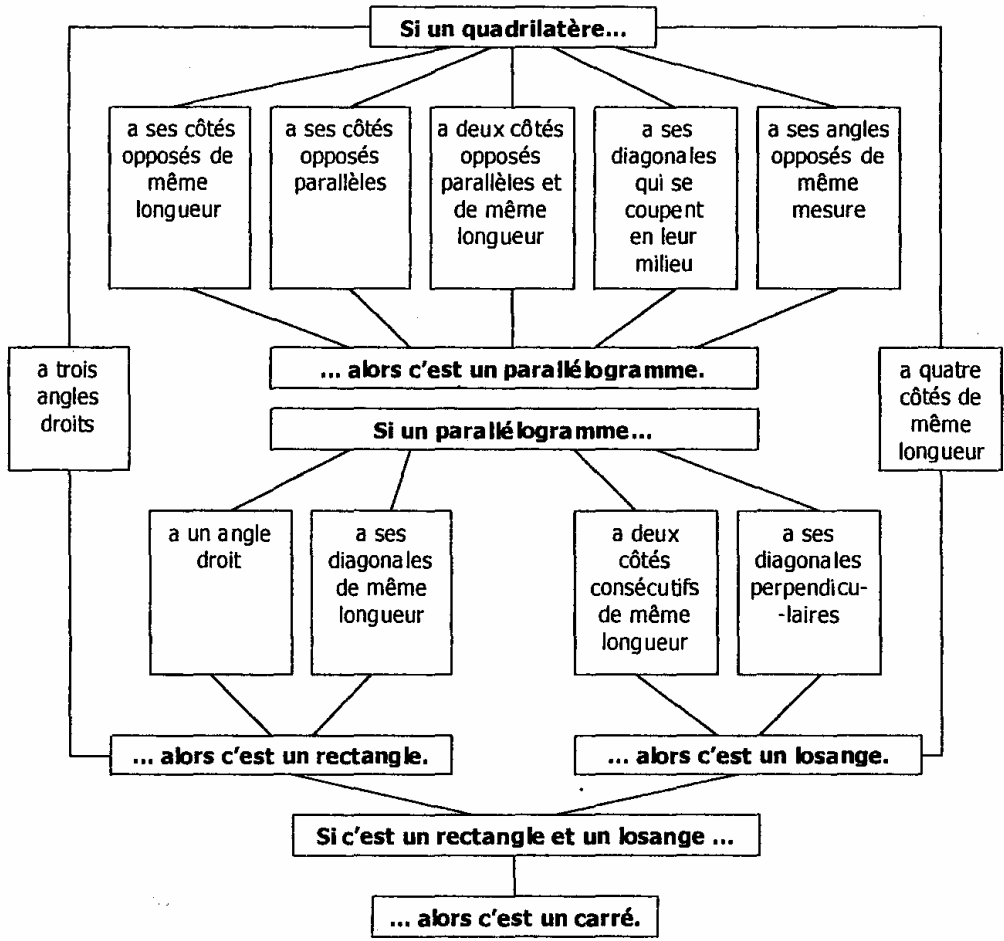


ABCD est un trapèze.
 $(AB) \parallel (CD)$

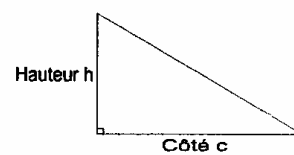
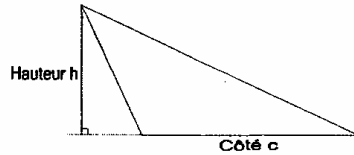
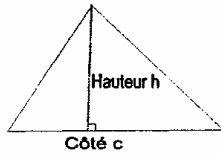
Définition d'un trapèze

Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles.

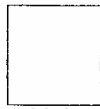
Propriétés caractéristiques des parallélogrammes...



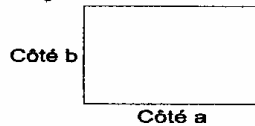
Formules de calcul d'aires



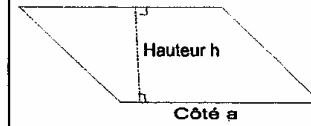
$$\text{Aire d'un triangle} = \frac{\text{Côté} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{c \times h}{2}$$



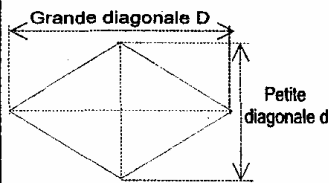
Aire d'un carré
= $c^2 = c \times c$



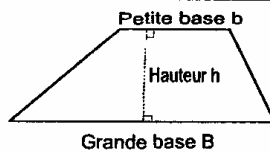
Aire d'un rectangle
= $a \times b$



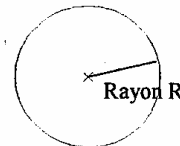
Aire d'un parallélogramme
= base \times hauteur = $b \times h$



Aire d'un losange
= $\frac{\text{Grande diagonale} \times \text{petite diagonale}}{2}$
= $\frac{D \times d}{2}$



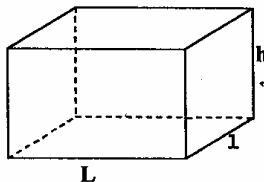
Aire d'un trapèze
= $\frac{(\text{Grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$
= $\frac{(B + b) \times h}{2}$



Aire d'un disque
= $\square \times R \times R$
= $\square \times R^2$

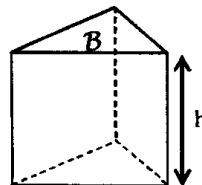
Formules de calcul de volumes

PAVE OU CUBE



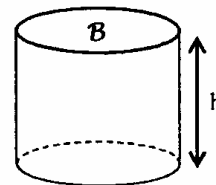
VOLUME = $L \times l \times h$
= $\mathcal{B} \times h$

PRISME



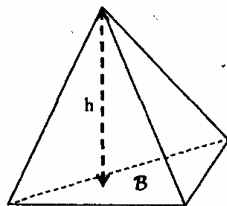
VOLUME = $\mathcal{B} \times h$
Où \mathcal{B} est l'aire de la base
et h est la hauteur

CYLINDRE



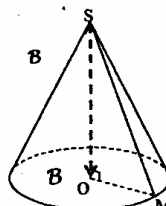
VOLUME = $\mathcal{B} \times h$
Où \mathcal{B} est l'aire de la base
et h est la hauteur.

Pyramide



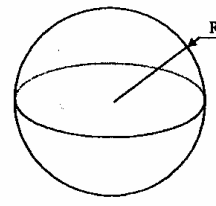
Volume = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$

Cône de révolution



Volume = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3}$

Sphère



Volume = $\frac{4}{3} \times \square \times R^3$